ÉNONCÉ

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective.

LEÇONS.

155

150 :

204 :

RÉFS.

[Zad] Zadovique, un max de maths. p. ??

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. Cayley Hamilton.
2. $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$
3. exp est C^1 et $D_0 \exp = \exp$
4. th. inv locale.

DÉMO

: à l'oral.

écrit au tableau.

: pour comprendre.

⊂ LEM : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(e^A) = e^{\overbrace{\mathrm{tr}(A)}^{\text{exp complexe.}}} \neq 0$,

donc $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$

⊃ Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$

PLAN

1. $e^A \in \mathbb{C}[A]$.
2. $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$.
3. $\mathbb{C}[A]^\times$ ouv connexe par arcs de $\mathbb{C}[A]$.
4. $\mathbb{C}[A]$ ouvert et fermé ds $\mathbb{C}[A]^\times$
5. $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \supset GL_n(\mathbb{C})$

(1) $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{N\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}}_{\in \mathbb{C}[A]} \in \overline{\mathbb{C}[A]} = \mathbb{C}[A]$ → sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dim finie ⇒ fermé.

(2) double inclusion :

$\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$.

⊂ $\mathbb{C}[A]^\times \subset \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ clair.

⊃ soit $M \in GL_n(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}[A]$.

$\chi_M = \det(XI_n - M) := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Par le th. de Cayley Hamilton, $0 = \chi_M(M) = \overset{\det(M)\neq 0}{\overset{\|}{a_0}} I_n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k M^{k-1}}_{:= Q(M)} \times M$

Donc $I_n = M \times \underbrace{\left(-\frac{Q(M)}{a_0}\right)}_{\in \mathbb{C}[M] \subset \mathbb{C}[A].}$

Donc $M \in \mathbb{C}[A]^\times$.

(3) Mq $\mathbb{C}[A]^\times$ ouvert connexe p/ arc de $\mathbb{C}[A]$

$\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ ouvert ds $\mathbb{C}[A]$

↳ topologie induite et $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert ĉ $\det^{-1}(\mathbb{R}^*)$

Soit $M, N \in \mathbb{C}[A]^\times$

On veut construct arc cont reliant M à N.

⚠ on veut rester $\mathbb{C}[A]^\times$ donc besoin de précautions sur les val. prises par le det.

Construct via arc de $\mathbb{C}\setminus Z$.

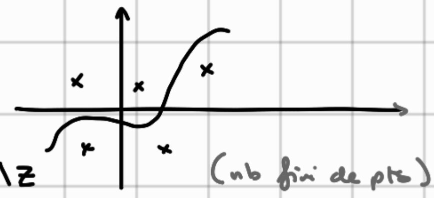
On pose $P : z \in \mathbb{C} \mapsto \det(zN + (1-z)M)$. $\in \mathbb{C}[z]$.

On a : $P(0) = \det(M) \neq 0$; $P(1) = \det(N) \neq 0$ (en particulier P non nul)

Soit $Z = \{ z \in \mathbb{C},\ P(z) = 0 \}$. Z est fini car $P \neq 0$.

. $\mathbb{C}\setminus Z$ est connexe par arcs (Z fini)

Donc $\exists\, \gamma$ chemin C^0 reliant 0 à 1 dans $\mathbb{C}\setminus Z$



(nb fini de pts)

On peut donc construire conc ds $\mathbb{C}[A]^\times$:

$\Gamma : t \mapsto \gamma(t) N + (1-\gamma(t)) M$ est un chemin conti de M vers N ds $\mathbb{C}[A]^\times$ → par construct°

car $\forall t$, $\Gamma(t) \in \mathbb{C} \setminus Z$.

Donc $\det(\gamma(t) N + (1-\gamma(t)) M) \neq 0$.

4) $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.

Rq : $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^\times$ car exp est lim de polynômes en A et $\mathbb{C}[A]$ fermé ĉ ss ev dim finie $\mathcal{M}_n$

<u>$\exp(\mathbb{C}[A])$ ouvert</u>

On va use TIL.

→ vois de I_n.

exp est C^1 et $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

On a : $D_M \exp = \exp(M)$. → exp est sa propre différentielle.

D'où $D_0 \exp = \exp(I_n) = I_n$ est inversible.

Donc par le TIL, $\exists\, \mathcal{U} \subset \mathbb{C}[A]$ vois ouv de 0 et $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}[A]^\times$ vois ouv de I_n

tels que $\exp : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ soit un C^1-difféo.

En particulier, $\exp(\mathbb{C}[A])$ contient un vois ouvert de I_n.

On veut mq vois de tt ses points.

Soit $M = \exp(B) \in \exp(\mathbb{C}[A])$

ĉ ens !

$\exp(B + \mathcal{U}) = \exp(B)\exp(\mathcal{U}) = M\mathcal{V}$. ouvert car $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to MX$ est un homéo car M inversible.

les mat sont dans $\mathbb{C}[A]$ donc commutent

Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$

↳ $M\mathcal{V}$ est un voisinage de M et il est inclus dans $\exp(\mathbb{C}[A])$ car $= \exp(\underbrace{B + \mathcal{U}}_{\subset \mathbb{C}[A]})$

<u>$\exp(\mathbb{C}[A])$ fermé :</u>

en fait, un ss groupe topologique ouvert est tjrs fermé.

On mq que le complémentaire est ouvert.

$$E := \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \underbrace{\bigcup_{M \in E} \overbrace{\underbrace{M \exp(\mathbb{C}[A])}_{\text{ouvert}}}^{\varphi^{-1}(\exp \mathbb{C}[A])}}_{\text{ouvert}}$$

avec $\varphi : X \mapsto M^{-1} X$.

$X \in \varphi^{-1}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \varphi(X) = M^{-1}X \in \mathcal{A}$.

$\Leftrightarrow X \in M\mathcal{A}$.

car mul par M^{-1} est conti

ĉ $\bigcup$ d'ouverts.

En effet

⊂ $E \subset \bigcup_{M \in E}$ gauche

⊃ Soit $B = \underset{\in E}{M} \exp(\underset{\in \mathbb{C}[A]}{D})$. $B \in \mathbb{C}[A]^\times$.

Si $B \in \exp(\mathbb{C}[A])$, $\exists C$ tq $M\exp(D) = \exp(C)$ donc $M = \exp(C - D)$: ABSURDE

commutent car dans $\mathbb{C}[A]$ — $M \in E$.

Donc $B \in E$ — $\notin \exp(\mathbb{C}[A])$

Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$

5. $\exp(\mathbb{C}[A])$ non vide $(\exp(A) \in)$, ouvert et fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$ donc $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$

- Finalement, $A \in \mathbb{C}[A]^\times = \exp \mathbb{C}[A] \subset \exp(\mathcal{M}_n\mathbb{C})$

DÉMO DES RÉSULTATS ASSOCIÉS.

. EXP MAT

1. exp est C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $D_X \exp(H) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{0 \le i,j \le k-1 \\ i+j=k-1}} X^i H X^j$ [Rb] alg

2. exp est un C^1 difféo d'1 vois de 0 ds 1 vois de I_n. [PG (0)] exo 65

1. IDÉES : th. dériv ss signe Σ

. Notons $\varphi_k : X \mapsto X^k$.

Étude de φ_k.

φ_k est C^∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (composantes polynomiales)

dériv

$\forall k \geq 1, \varphi_k(X+H) = (X+H)^k$ ⚠ pas commutatif.

$$= X^k + X^{k-1}H + X^{k-2}H + \dots + HX^{k-2} + \dots HX^{k-1} + \underbrace{o(\|H\|)}_{\text{termes avec au } \odot\ H^2}$$

$$= \varphi_k(X) + \underbrace{\sum_{\substack{0 \le i,j \le k-1 \\ i+j=k-1}} X^i H X^j}_{\ell(H)} + \|H\| \varepsilon(H). \quad \varepsilon(H) \to 0$$

Rq : pr éviter ... : récu.

Et ℓ est linéR, ℓ conti car dim $< +\infty$

Donc $D_X \varphi_k = \ell$

Pour $k=0$: $\varphi_0(X) = I_n$, $D_X \varphi_0 = 0$.

domi : On sait déjà que $\sum \frac{\varphi_k}{k!}$ CVS (exp bn déf)

$\forall k \geq 1$. $\forall \|X\| < a$, $a > 0$, $\forall H \in \mathcal{M}_n$:

$$\|D_X \varphi_k(H)\| \leq \sum_{\substack{0 \le i,j \le k-1 \\ i+j=k-1}} \|X\|^{i+j} \|H\|$$

$$\leq \|X\|^{k-1} \|H\| \underbrace{\sum_{0 \le i,j \le k-1} 1_{i+j=k-1}}_{\le k}$$

Donc $\left\| \frac{D_X \varphi_k}{k!} \right\| \leq \frac{\|X\|^{k-1}}{(k-1)!} \leq \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}$ TG série CV $\exp(a)$.

indé de X

Donc $\sum_{k \geq 0} \frac{D_X \varphi_k}{k!}$ CVU sur tt compact

$k=0 \to 0$.

Par th. dériv ss signe Σ ds l'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, exp est C^1 et on diff. ss signe Σ

2

On a : $\exp$ C^∞, $D_0 \exp = I_n$.

Par le TIL, $\exists$ V vois 0, W vois de $\exp(0) = I_n$ tq $\exp : V \longrightarrow W$ C^∞ difféo